EPISODIOS DE ENSEÑANZA Y ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO

Conocimiento especializado del profesorado de matemáticas y formación del profesorado (MTSK-TE)

AGENCIA ESTATAL DE INVESTIGACIÓN - Convocatorias 2018
Proyectos de I+D de GENERACIÓN DE CONOCIMIENTO y Proyectos de I+D+i RETOS INVESTIGACIÓN

A continuación, mostramos algunos de los episodios, extraídos de nuestras investigaciones, que se han analizado utilizando el modelo analítico del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK). Se corresponden con diferentes niveles educativos y diferentes contenidos matemáticos implicados. Cada episodio tiene una doble finalidad; por un lado, permite visualizar la utilidad del modelo y su aplicación; en segundo lugar muestra cómo una realidad de aula puede ser comprendida, y nos sitúa en un plano formativo que trasciende la propia investigación.
En cada episodio hemos especificado los investigadores que han participado (y sus roles), el nivel educativo en el que está inserto y el contenido matemático se aborda. Cada uno de ellos dispone de una breve contextualización (para situar al lector), la transcripción literal y su análisis con MTSK

EPISODIO 1

Investigador principal (doctorando): Juan Pedro Martín Díaz

Director/es del trabajo: Dr. Miguel Ángel Montes Navarro

Nivel educativo: Educación Infantil

Contenido matemático: Formulación de problemas

Breve contextualización del episodio

La sesión en cuestión tenía como objetivo que alumnos de 5 años de educación infantil consiguieran formular un problema matemático. Para ello, la maestra (Rosa), seleccionó un mural para llevarlo al aula y que los alumnos pudiesen basar los problemas formulados en este. Para tratar de focalizar la atención en un momento determinado de la sesión, Rosa señaló una mujer que cruzaba la carretera como elemento que debía formar parte del enunciado del problema y que fuese el detonante para que los alumnos comenzasen a formular un problema.

Transcripción del episodio

A: Seguro que es esa mujer, porque lleva una bolsa de todas las cosas
R: Venga pues invéntate una historia de esta mujer
A: Quiere ir a un sitio, pero el policía no le deja pasar
R: Esta mujer quiere ir a todos los sitios, pero el policía no le deja pasar. Ven, fíjate bien, a ver si es que quiere ir o que ya ha ido. Vamos a inventarnos un problema con esta mujer. ¿Empiezo

yo? Una mujer va a comprar pan... y, ¿qué pasa? Imagínate que esta mujer es tu mamá y va a comprar pan. Y, ¿qué pasa?
A: Que está cortada la carretera y no se puede pasar.
R: Y, ¿cuál es tu pregunta?
A: ¿Cuántos coches hay?
R: Yo creo que tú has mezclado unos cuantos problemas: uno va a comprar el pan, no puede pasar, cuantos coches hay. Ha sido una mezcla. Vamos a ayudarle con la primera parte. ¿A alguien se le ocurre algo? La mujer va a comprar el pan y qué le pasa al comprar el pan. A ver Nadia, la mujer va a comprar el pan. Y qué le pasa en la tienda del pan.
A: Que la señora ha comprado dos panes y quería comprar 3 porque en la tienda no había. R: Porque en la tienda no había, ¿qué?
A: Muchos panes
R: ¿Y la pregunta cuál es? Ha comprado dos y ella quería tres y ¿la pregunta cuál es?
A: ¿Cuántos quedaran en la tienda? 0
R: Pues 0. Porque quería llevarse tres y como nada más que ha comprado dos, entonces la tienda se quedará con 0. Muy bien.

Análisis del conocimiento especializado

Con el objetivo de mejorar y facilitar la formulación de problemas por parte de sus alumnos, Rosa comenzó´ a utilizar diferentes estrategias que le permitieran solucionar la dificultad de sus estudiantes para determinar elementos que puedan ser el contexto del problema, así´ como los datos del mismo (**KFLM**: dificultades y obstáculos).

En primer lugar, la maestra focalizó la atención de sus alumnos en una mujer que se encontraba en el mural debido a que la propia Rosa identifica tres posibles situaciones a partir de las cuales formular un problema matemático.

Esta focalización permite a los alumnos no desviar la atención de un elemento que puede resultar interesante de cara a la formulación de problemas matemáticos (**KMT**: ETTE). Además, Rosa pretende que la situación sea lo más cercana posible a los estudiantes y, por este motivo, les pide a estos que imaginen que la mujer del mural es su madre (**KFLM**: formas de interacción). A partir de esta situación que la maestra propone a sus alumnos, surge la formulación de un problema:

Nuevamente se aprecia la dificultad de su alumnado para completar los elementos del problema, en este caso la pregunta. Por ello, Rosa vuelve a animar a su alumno a formularla. Además, se aprecia que tiene conocimiento sobre como interactúan sus alumnos con el contenido. En este caso, Rosa conoce que sus alumnos realizan restas en la que el minuendo es menor que el sustraendo (2-3=0) debido a que sus alumnos trabajan aun con números naturales (**KFLM**: formas de interacción).

EPISODIO 2

Investigador principal (doctorando): Gonzalo Espinoza Vásquez

Director/es del trabajo: Dra. Diana Zakaryan y Dr. José Carrillo Yañez.

Nivel educativo: Secundaria

Contenido matemático: Concepto de función

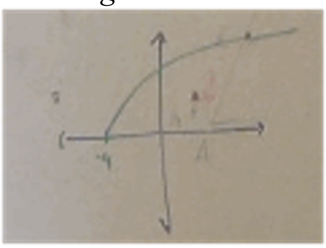
Breve contextualización del episodio

El caso de estudio, Arturo, es profesor de matemáticas y ha sido identificado como *profesor* experto bajo los criterios expuestos por Rojas et al. (2012). Arturo es profesor de matemáticas con más de 13 años de experiencia docente a nivel secundario y universitario. Posee un grado de Magister en Matemáticas y se desempeña en un establecimiento de educación privada en Chile en el que enseña el concepto de función a estudiantes de 14-15 años. A continuación, se analiza un episodio de la quinta clase en la que se identifica el dominio y recorrido de funciones utilizando la representación gráfica de las mismas, poniendo el énfasis en que el dominio se debe identificar y ubicar en el eje X, mientras que el recorrido se ubica en el eje Y. Arturo incorpora el uso de intervalos para representar el dominio y el recorrido.

Se presenta nuevamente la relación entre ecuación y función cuando se busca la intersección de la gráfica de la función con el eje X, mientras que los alumnos presentan dificultades en la ubicación de puntos en el plano que pertenecen tanto a la gráfica de la función como al eje X.

Transcripción del episodio

El siguiente extracto corresponde a los datos recolectados en la tesis doctoral Espinoza (2020). Las intervenciones de la clase se han identificado con PA para indicar al profesor y con A para las intervenciones de algún Alumno (As es usado cuando varios alumnos responden a la vez).

824	*PA: Por eso, porque mis dibujos no están bien graduados. Para ustedes va a ser fácil porque las distancias van a ser todas iguales [los cuadros del cuaderno]. Está claro que aquí mis distancias no son todas iguales porque estoy dibujando en papel blanco.* *Lo que estábamos hablando era que el domino de la función lo estamos viendo en el eje X.[interrumpen la clase]. Estamos diciendo que el dominio de la función lo estábamos viendo en el eje X. ¿A qué me refiero con eso? Si yo dibujo en el plano cartesiano, voy a inventar una función:* *Así, según este dibujo, ¿cuál sería el dominio de la función?, ¿cuáles serían los valores del x que tienen imagen? estos valores de aquí [semieje X a partir del -4] ¿tienen imagen?* 
825	*As: si*
826	*PA: si, porque chocan en la función. El 0, ¿tiene imagen?*
827	*A: si*

828	*PA: si, es ese valor [lo remarca en el plano] un valor aquí positivo, ¿tiene imagen?*
829	*As: Si, arriba*
830	*PA: ¿y este de acá? ese puntito ¿tiene imagen?*
831	*As: no*
832	*PA: entonces, en esta línea azul viven los x [eje x], estos x de acá chocan en la gráfica y por tanto tienen imagen, pero si yo tomo ese puntito que esta acá [menor a -4], ese de ahí ¿tiene una imagen en la función?*
833	*As: no*
834	*PA: no, entonces ese puntito que está ahí, ¿es parte del dominio de la función? No. Todos desde aquí, desde el -4 a la derecha ¿tienen imagen?*
835	*A: ¿y cuál sería la imagen?*
836	*As: si, todos tienen*
837	*PA: inventé una función, por eso no sabemos exactamente, solamente estoy dando la idea de esto, que visualmente distingamos quiénes son parte del dominio y quienes no son parte del dominio. Del -4 a la derecha, ¿todos ellos tienen imagen?*
838	*As: si*
839	*PA: ¿Cuál es la imagen del -4? ese es el único que, por el gráfico, podemos deducir.*
840	*A: 0*
841	*PA: 0. La imagen del -4 es el 0 según esta función, como es el único dato, es lo que la gráfica me está dando como información*
842	*A: ah, ¿por qué? ¿Dónde está la rayita marca el cero?*
843	*PA: para esta función, su dominio, ¿Cuál va a ser?*
844	*A: 0,-4*
845	*PA: de aquí [indica al -4], de este valor hacia la derecha,*
846	*A: un intervalo*
847	*PA: ¿cómo escribíamos?*
848	*A: un intervalo*
849	*PA: exactamente, un intervalo va a ser el dominio. Puede ser un conjunto de todos los racionales, pero también puede ser un intervalo, y ¿qué intervalo es este?*
850	*As: de -4 al infinito positivo, incluido el -4*
851	*PA: en infinito, ¿qué tengo que poner?*
852	*As: abierto*

853	*PA: y en el otro*
854	*As: cerrado*
855	*PA: cerrado en el otro, muy bien.*
856	*A: ¿desde cuándo que ocupamos esto?*
857	*PA: Estoy recién mostrándoselos. Por algo vimos inecuaciones antes y porque en las inecuaciones ocupábamos intervalos*
858	*A: [pregunta por unas calificaciones]*
859	*PA: se fijan que el domino de la función lo podemos determinar mirando el dibujo, la representación de la función sin necesidad de que nos den la expresión que representa la función, solamente con su gráfico a veces podemos determinar su dominio. Recorrido "visualmente". El recorrido eran los valores de y, elementos del conjunto de llegada, pero para que pertenecieran al recorrido tenían que ser imágenes de alguien. Como eran los y, los y viven en el eje vertical, por lo tanto, el recorrido lo ven acá [eje Y] ¿cuál sería el recorrido de esta función x+3?*

Análisis del conocimiento especializado

En el extracto anterior se identifica el objetivo del profesor como reconocer y representar el dominio y recorrido de la función mediante su representación gráfica. Para ello, propone a sus estudiantes tareas de identificación del dominio y recorrido de la función, en las que se deben ubicar imágenes y pre imágenes, a la vez, los estudiantes deben reconocer cuáles son los elementos que tienen a partir de las representaciones dadas. En este sentido, se observa que Arturo posee conocimiento sobre cómo se puede representar una función, Algebraicamente y gráficamente, (**KoT**-representaciones) y conoce que el dominio y el recorrido se pueden identificar mediante estas representaciones (**KoT**-procedimientos). Esto último también se categoriza como el conocimiento sobre una forma de representar el dominio y recorrido de la función gráficamente (**KoT**-representaciones). Este procedimiento consiste en estimar cuáles elementos del eje X poseen imagen.

Por su parte, en la línea 824, Arturo muestra la importancia de contar con ejes bien graduados para obtener conclusiones adecuadas respecto a la función. De aquí, el profesor reconoce que la cuadrícula de los cuadernos de matemáticas son un recurso útil para el estudio de las gráficas de las funciones (**KMT**-Recursos), asimismo, reconoce las desventajas del uso de la pizarra blanca para este fin, donde obtiene representaciones poco precisas (**KMT**-Recursos).

Siguiendo en el **KMT**, en la línea 837 se observa que el ejemplo seleccionado (inventado, según Arturo) tiene fines de enseñanza y determina el objetivo del episodio. Adicionalmente, estos ejemplos permiten identificar qué es lo que espera logren sus estudiantes (**KMLS**-Expectativas) (identificar el dominio y recorrido de manera gráfica), cómo registrarlos (en conjunto o intervalos) y, a la vez, da cuenta de su conocimiento sobre lo que la secuenciación de temas (**KMLS**-Secuenciación) que son conocimientos previos; la representación de intervalos y el conjunto de números racionales que manejan, línea 849; las ecuaciones e inecuaciones que ya saben resolver, línea 857; y el manejo de los conceptos recién estudiados de dominio, recorrido, imagen y pre imagen.

El conocimiento de ecuaciones e inecuaciones, además de ser un conocimiento previo de los estudiantes, corresponde a un tema que presta ayuda a Arturo en la enseñanza y trabajo con la función. La ecuación es utilizada para determinar la pre imagen de un elemento dado, mientras que las inecuaciones le permiten determinar el dominio y recorrido de la función. En este sentido, el conocimiento de esta utilidad de ecuaciones e inecuaciones durante el trabajo con funciones corresponde al conocimiento de una conexión auxiliar entre ambos temas.

El episodio analizado permite, no solo identificar conocimiento en diferentes subdominios: **KoT, KSM, KMT y KMLS**, sino que también interpretar cómo estos conocimientos se ponen en juego de acuerdo a los propósitos de enseñanza de Arturo. Vemos que la enseñanza del dominio y recorrido de la función está sustentada en el conocimiento de Arturo sobre cómo estos conjuntos pueden calcularse e identificarse en la representación gráfica de la función. Para ello, el profesor selecciona o crea ejemplos y tareas para sus estudiantes que involucran sus conocimientos previos y atienden a aquello que espera lograr, a nivel conceptual y procedimental, en este nivel.

EPISODIO 3

Investigador principal (doctorando): Víctor Javier Barrera Castarnado

Director/es del trabajo: Dr. Luis Carlos Contreras González y Dra. María Cinta Muñoz Catalán

Nivel educativo: GRADO UNIVERSITARIO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Contenido matemático: Geometría plana. Polígonos.

Breve contextualización del episodio

Analizamos el MTSK movilizado en una clase de formación de maestros en la que se implementa una tarea formativa diseñada ad hoc. Se diseñaron 5 tareas, cada una formada por un caso, inspirado en una situación de aula de Primaria real, y actividades enfocadas a la discusión sobre distintos aspectos del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. El episodio analizado corresponde a la resolución de una actividad en la que los estudiantes para maestro, después de leer un fragmento en el que se indica que los escolares han representado en la pizarra distintas figuras clasificándolas en polígono y no-polígono, deben analizar esta distribución, indicando las consecuencias que consideran que puede tener la distribución con el concepto de polígono. Nos interesa determinar si el MTSK pretendido se moviliza con la actividad y saber qué lo promueve.

Transcripción del episodio

127. For: Primera cuestión de la tarea: analizamos esta distribución, pensamos qué consecuencias tiene esta distribución en relación con el concepto de polígono, ¿qué creéis?

> *128. B: Que no tienen claro la definición en sí, ¿no?*
>
> *129. For: ¿Por qué crees que no tienen clara la definición?*
>
> *130. B: Porque no los clasifican bien.*

131. For: O sea, que tú tienes ya un concepto sobre lo que es un polígono y consideras que esta situación no es correcta, ¿no?

132. D: Intentan diferenciar los que son más [hace el gesto de entrecomillas con los dedos]…, se parecen más sus lados, ¿no?, a los que no se parecen tanto…, a los que son más regulares de los que son más irregulares.

133. For: Los que son más regulares de los que son más irregulares… Quédate con esa conceptualización que acabas de poner encima de la mesa. ¿Qué significa ser más regular?

134. D: Hombre, que sean…

135. E: Que cuando los cortamos por la mitad quedan dos partes iguales, ¿no era así? O algo así.

136. P: Que es simétrico.

137. For: Que si cortas por la mitad tienes dos partes iguales.

138. E: La simetría.

139. For: Ya tenemos otra idea importante…, la mitad, cortar, partes iguales… ¿Partes iguales en qué? ¿Qué es la mitad?

140. P: La simetría, ¿no?, de la figura [une las palmas de las manos emulando dos partes simétricas].

141. E: La simetría.

142. For: O sea, que estamos hablando de figuras simétricas. Vale, estamos hablando de figuras simétricas uniéndolas al concepto de regularidad. Pero además el concepto de regularidad acabamos de decir que puede ser más regular…, una cosa puede ser más regular que otra.

143. D: No, bueno yo te diría…, o regular o irregular.

144. For: Bien, eso no es lo mismo que has dicho antes. O sea, ahora dices que o es regular o es irregular. Eso no es lo mismo que has dicho antes.

145. D: Me he venido a referir a regular e irregular.

146. For: Es regular o irregular ¿Estamos de acuerdo en eso? Un polígono es regular o irregular.

147. E: Sí. Es que lo que pasa, es que yo me quiero referir… es que a lo mejor por muy poco no es regular, entonces es como más regular [hace el gesto de comillas con los dedos].

<u>Análisis del conocimiento especializado</u>

Organizamos la información, tal y como aparece en la tabla siguiente, identificando el subdominio del conocimiento que se moviliza, la justificación de este y qué o quién lo induce (marcado en color verde). Se ha destacado en color azul el conocimiento pretendido que se moviliza. Así mismo se ha incluido en la última columna comentarios sobre las intervenciones del formador.

TFor 1.1.A UNIDAD DE INFORMACIÓN	MTSK	EVIDENCIA-INDICIO	¿CÓMO?
127. For: Primera cuestión de la tarea: analizamos esta distribución, pensamos qué consecuencias tiene esta distribución en relación con el concepto de polígono, ¿qué creéis? 128. B: Que no tienen claro la definición en sí, ¿no? 129. For: ¿Por qué crees que no tienen clara la definición? 130. B: Porque no los clasifican bien. 131. For: O sea, que tú tienes ya un concepto sobre lo que es un polígono y consideras que esta situación no es correcta, ¿no?	KoT Definiciones, propiedades y sus fundamentos	*El conocimiento especializado de B le permite reconocer figuras mal clasificadas como polígonos*	Tarea formativa. Gestión del formador que busca justificación. For busca justificación en la respuesta del EPP favoreciendo la reflexión. Expresa lo que entiende que quiere decir B.
134. D: Intentan diferenciar los que son más [hace el gesto de entrecomillas con los dedos]..., se parecen más sus lados, ¿no?, a los que no se parecen tanto..., a los que son más regulares de los que son más irregulares. 135. For: Los que son más regulares de los que son más irregulares... Quédate con esa conceptualización que acabas de poner encima de la mesa. ¿Qué significa ser más regular? 136. D: Hombre, que sean...	KoT Definiciones, propiedades y sus fundamentos. KPM Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal. KFLM Formas de interacción con un contenido matemático.	El conocimiento especializado de D le permite definir el término "más regular" como "polígono en el que sus lados se parecen". Su conocimiento del uso del lenguaje formal es deficiente. Su conocimiento sobre los obstáculos que pueden presentar los estudiantes de primaria le permite hacer esta interpretación.	Tarea formativa. Plantea cuestión sobre una expresión no correcta para reflexionar sobre ella.
137. E: Que cuando los cortamos por la mitad quedan dos partes iguales, ¿no era así? O algo así. 138. P: Que es simétrico. 139. For: Que si cortas por la mitad tienes dos partes iguales. 140. E: La simetría.	KoT Defin, prop y sus fund	El conocimiento que tiene E sobre el concepto de polígono regular le permite establecer una equivalencia con ser simétrico. El conocimiento de P sobre propiedades de polígonos le permite relacionar la propiedad dada por E con el concepto de figura simétrica.	Interacciones en el aula: - Respuesta a una cuestión planteada por For. - Respuesta a una intervención de una EPP.
141. For: Ya tenemos otra idea importante..., la mitad, cortar, partes iguales... ¿Partes iguales en qué? ¿Qué es la mitad? 142. P: La simetría, ¿no?, de la figura [une las palmas de las manos emulando dos partes simétricas]. 143. E: La simetría.	KoT Registros de representación	Su conocimiento sobre el concepto de simetría le permite representar a través de un registro real este concepto.	Plantea cuestiones a partir de intervenciones de EPP cuya reflexión favorece la movilización de conocimiento. Interacciones en el aula.
144. For: O sea, que estamos hablando de figuras simétricas. Vale, estamos hablando de figuras simétricas uniéndolas al concepto de regularidad. Pero además el concepto de regularidad acabamos de decir que puede ser más regular..., una cosa puede ser más regular que otra. 145. D: No, bueno yo te diría..., o regular o irregular. 146. For: Bien, eso no es lo mismo que has dicho antes. O sea, ahora dices que o es regular o es irregular. Eso no es lo mismo que has dicho antes. 147. D: Me he venido a referir a regular e irregular.	KoT Def, prop y sus fund KPM Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal.	El conocimiento especializado de D le permite determinar dos clases de polígonos: regulares e irregulares. Se corrige el uso impreciso del término "más regular" asociado al concepto de polígono.	Plantea cuestiones para reflexionar sobre propiedades de polígonos que hacen que sean regulares, simétricos (KoT), además busca que se haga un uso correcto del lenguaje (KPM). Interacciones en el aula.

Conocimiento pretendido
Cómo se moviliza el conocimiento

En la intervención de la EPP B [TF1.1A.1 128, 130] *Que no tienen claro la definición en sí, ¿no? Porque no los clasifican bien* identificamos indicios de que conoce el concepto de polígono (**KoT**, Definiciones, propiedades y sus fundamentos) ya que hacen constar que en la ilustración hay figuras situadas de forma inadecuada. La formadora plantea cuestiones a los EPP buscando la justificación de sus afirmaciones, favoreciendo de esta forma su reflexión. Este conocimiento surge directamente en respuesta al enunciado de la actividad.

De igual modo en la intervención de D [TF1.1A.1 U132] *Intentan diferenciar los que ... se parecen más sus lados a los que no se parecen tanto..., a los que son más regulares de los que son más irregulares* hace mención a los lados, como elementos significativos en los polígonos, además de mencionar los términos regular e irregular como tipos distintos de polígonos (**KoT**, Definiciones, propiedades y sus fundamentos), aunque no explicita la definición de cada uno de estos conceptos. Este EPP ha interpretado el enunciado de la actividad en un sentido diferente al sentido con el que está planteada. El foco de la actividad está puesto en el subdominio **KoT**, dentro del dominio de Conocimiento Matemático (MK) y su respuesta está encaminada a determinar los argumentos utilizados por los escolares a la hora de colocar las figuras representadas en un grupo u otro (**KFLM**, Fortalezas y dificultades o Formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático). Esta intervención hará que el debate se desvíe hacia esa interpretación favoreciendo la movilización de conocimiento de esta categoría. Por lo tanto, el conocimiento movilizado sobre esta intervención [TF1.1A.1 U132-183] lo consideramos inducido por interacciones en el aula, a partir de esta intervención de D y con participación de otros EPP y de la propia formadora.

Por otra parte, D utiliza un lenguaje poco formal, poco preciso vinculado a **KPM**, Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal, al referirse a tipos de polígonos en términos de más regulares o más irregulares. Esta falta de precisión en el lenguaje aparece en algunas intervenciones de los estudiantes, y el formador las aprovecha para hacerles ver la importancia de utilizar un lenguaje adecuado en matemáticas, movilizando **KPM** (Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal) así como conocimiento de otras categorías o subdominios.

En las intervenciones que hacen referencia a la simetría de las figuras [TF1.1A.1 U136-142] identificamos una evidencia del conocimiento de P sobre lo que significa que un polígono sea simétrico ya que interpreta la propiedad que da E en la U.135 como lo que caracteriza a estos polígonos, **KoT**, Definiciones, propiedades y sus fundamentos. Por otra parte, destacamos la intervención [TF1.1A.1 U140] en la que la EPP utiliza elementos reales (sus manos) para explicar qué significa que un objeto sea simétrico (**KoT**, Registros de representación). Este conocimiento (pretendido o no) es inducido por la intervención del EPP y por la gestión que hace el formador de la situación.

En el análisis hemos identificado diferentes detonantes de conocimiento:

- La propia tarea formativa: principalmente los enunciados de las actividades, si bien hay intervenciones de EPP en las que se evidencia conocimiento especializado durante la lectura del caso.
- La intervención del formador:
    - Reformula la tarea destacando algún aspecto de esta.
    - Responde a intervenciones de EPP: resuelve dudas, usa los posibles errores, valida aportaciones, plantea alguna cuestión para generar debate.
    - Resume las aportaciones más importantes como cierre de la actividad.
- Interacciones en el aula (entre los EPP y/o el formador).

En la resolución de todas las actividades propuestas se consigue movilizar el conocimiento pretendido a partir del propio enunciado de la actividad. El debate que se genera con la puesta en común de dicha resolución hace que se movilice, además, conocimiento (pretendido o no) que no se refleja en el trabajo individual previo de los EPP al resolver por escrito las actividades.

Advertimos así, cómo los EPP reflexionan y establecen conexiones con elementos del conocimiento especializado que trascienden en principio con los circunscritos al caso, cuestión que no suele ser habitual en otro tipo de tareas formativas planteadas en la formación inicial.

Una vez analizadas todas las transcripciones de sesiones de clase destinadas a la resolución de las tareas formativas (5 tareas formativas, 2 ciclos, 2 grupos de EPP) podremos comprobar si el conocimiento pretendido para cada actividad surge como respuesta al enunciado. En caso contrario deberíamos revisar la actividad.

También podremos comparar los resultados del análisis de la resolución de una misma tarea considerando las implementaciones en los dos ciclos con el mismo formador, para ver cómo influye el grupo de EPP en la movilización de conocimiento. Así mismo, podremos comparar los resultados del análisis de la resolución de una misma tarea en un mismo ciclo para ver si hay diferencias en cuanto a conocimiento movilizado en función de la gestión del formador.

Por último, hemos identificado situaciones en el aula, que no se han tenido en cuenta en este trabajo, que podemos considerar como oportunidades para desarrollar una gestión alternativa de la situación. Por ejemplo, en [TF1.1A.1 U135] una estudiante, respondiendo a la pregunta de la formadora *¿Qué significa ser más regular?* [TF1.1A.1 U133] da una respuesta en la que relaciona el ser regular con ser simétrico. Esta situación generada en el aula puede considerarse como una oportunidad para tratar con los EPP la relación que hay entre que un polígono sea regular con que este sea simétrico (**KoT**, Definiciones, propiedades y sus fundamentos; Registros de representación). Todos los polígonos regulares son simétricos (tienen, al menos, un eje de simetría) pero la implicación contraria no es cierta, bastaría con dar como ejemplo un rectángulo (de lados de longitudes diferentes), cuadrilátero con dos ejes de simetría que no es regular por tener lados de distintas longitudes (**KPM,** Formas de validación y demostración). Planteamos como posible estudio prospectivo el análisis de estas situaciones.

EPISODIO 4

Investigador principal (doctorando): Emma Lizelly Carreño Peña

Director/es del trabajo: Dra. Nuria Climent Rodríguez y Dr. Carlos Miguel Ribeiro.

<u>Nivel educativo: Universitario</u>

Contenido matemático: Polígonos y cuadriláteros

<u>Breve contextualización del episodio</u>

Laura es una estudiante para profesor de matemática de secundaria que cursa la primera asignatura de Práctica Pre Profesional, ubicada en el penúltimo año de la carrera, cuya duración es 5 años. Como parte de la asignatura, debe planificar y ejecutar sesiones de clases simuladas ante sus compañeros.

En el episodio que se muestra, Laura ejecuta la sesión para 1° de secundaria (12-13 años) "Clasificación inclusiva de cuadriláteros", para lo cual se le indicó que ponga énfasis en promover que los estudiantes clasifiquen "relacionadamente" los cuadriláteros, evitando grupos disjuntos. En los diálogos que se presentan puede verse el proceso constructivo que desarrolla Laura para transitar por los tipos de cuadriláteros, el cual termina valorando como complejo.

<u>Transcripción del episodio</u>

LAURA: […] Entonces una clasificación, vamos a decir así, común que se ve durante los cursos de matemática de primaria es esta: los cuadriláteros se clasifican según el criterio que es el paralelismo de los lados. […]

FORMADORA: ¿Qué, entonces ha revisado libros de texto de quinto y sexto? ¿o qué?

LAURA: Sí. En el de sexto se ven más de lo de las características de los ángulos, ¿no?, y quinto es como más de lados y ver si son paralelos o no, bueno y todas las figuras se ponen con la base horizontal y me di cuenta de la base horizontal ya cuando iba por los paralelogramos. […]

LAURA: Los cuadriláteros pueden ser por un lado …, vamos a ponerle según el cruce de lados, pueden ser simples y complejos.

¿Qué significa según el cruce de lados? si nos podemos dar cuenta (Laura les muestra una figura) este es un cuadrilátero que tiene los lados cruzados, por eso forma como un triángulo, entonces a los que cruzan los lados se les va a llamar complejos y a los que no se le cruzan los lados, como pasa con el resto de cuadriláteros se le va a llamar simples ¿sí?

[…] Ok, ahora, vamos a ponerle aquí, según la medida de ángulos, van a ver ángulos que se van a llamar los convexos y los no convexos.

Los convexos son aquellos que tienen los ángulos menores a 180 (grados), como todos los que están aquí, por ejemplo (les muestra los que tiene pegados en la pizarra), cualquiera de ellos, este (elige al trapezoide asimétrico) y los no convexos son los que van a tener un ángulo mayor a 180 (grados), no obtuso, sino mayor a 180 (elige al no convexo) ¿ok?, ¿hasta allí está claro?

LAURA: […] Dentro de todos estos cuadriláteros de los que hemos visto las características ¿cuál es el que tiene? ¿Cuál es el más general, el que tiene menos características?

SANDRA: El romboide.

LAURA: El romboide, Sandra dice el romboide (Sandra defiende su postura, pero no se escucha lo que dice). ¿De acuerdo o no de acuerdo?

DIANA: El trapezoide.

LAURA: El trapezoide, ¿por qué el trapezoide y no el romboide?

DIANA: Porque no tiene ningún lado paralelo, sus lados no son iguales.

LAURA: […] *Chicos aquí tengo un trapezoide asimétrico ¿verdad? ¿Qué pasa si yo, estos dos (lados) los abro iguales y esto lo cambio por un (lado) azul? (Cambia una de las tiras por otra de distinta medida).* […] *Entonces, yo puedo, aumentado la medida de los lados llegar a un simétrico, cambiándole los lados.*

(Laura va añadiendo o modificando características para transitar a los demás cuadriláteros)

LAURA: *[…] Entonces ¿de un trapecio isósceles paso a ¿un? […]*

LUCAS: ¿Solamente puedo pasar... no puedo pasar de (trapecio) escaleno a trapecio rectángulo?

LAURA: A ver eso les estoy diciendo, de donde a donde se pasa y ustedes me dicen de un trapecio isósceles paso a un trapecio rectángulo. Ahora ¿de un trapecio escaleno puedo pasar a un trapecio rectángulo?

DIANA: Nooo

LUCAS: Síií

LAURA: También, si este lado lo pongo recto aquí, paso de un (trapecio) escaleno a un (trapecio) rectángulo (del trapecio escaleno traza una perpendicular que va desde un vértice hasta la base mayor, el procedimiento es el mismo que utilizó con el trapecio isósceles).

LAURA: ¿Y cuál es el paralelogramo con menos características? ¿El rectángulo?

DIANA: No, el romboide

LAURA: […] Entonces ¿del romboide qué puedo formar? ¿Un rectángulo? ¿Qué le añado al romboide para que sea rectángulo?

DIANA: Ángulos rectos.

LAURA: Ya. Entonces de un romboide paso a rectángulo poniendo ángulos rectos ¿sí? ¿Qué más puedo hacerle a un romboide? ¿Qué puedo formar? O ¿del rectángulo que puedo formar? […]

SANDRA: Un rombo.

LAURA: Si se dan cuenta a todos hemos añadido una sola característica, o sea, un ejemplo, al (trapecio) isósceles un lado que sea perpendicular con el lado de acá (base menor). Si yo paso de romboide al, perdón, si yo paso del rectángulo al rombo tendría que cambiar ¿qué? Tendría que cambiar los ángulos y tendría que cambiar los lados. Dos cosas, dos características y tiene que ser solamente una ¿Cuál sería?

LAURA: […] yo hice una clasificación en donde como que habían partes, por ejemplo[…] yo parto del… trapezoide simétrico y asimétrico. Del trapezoide asimétrico yo no pasaba al simétrico yo me saltaba al trapecio y no había visto la relación del simétrico, cuando ustedes ya me dicen; y por qué era mi duda, porque yo no sabía si es que al agregar una característica yo podía aumentar o reducir la medida de los lados, ya con la aclaración que me hicieron temprano ya pude dar pie a que ustedes me digan que el trapezoide simétrico sale del asimétrico. ¿Qué más? Eee Qué difícil que es esta clasificación y…sí porque tienes que ponerte a pensar y ver todas las características que hay.

<u>Análisis del conocimiento especializado</u>

Para Laura considerar una clasificación común de cuadriláteros es tener como criterio el paralelismo de los lados. Esto coincide con la clasificación que suelen presentar los libros de texto, recursos que por lo que indica ha revisado (**KMT**–Recursos materiales y virtuales). Este conocimiento le permite diferenciar el nivel de desarrollo conceptual en quinto y sexto grado de primaria (**KMLS**-Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado), el cual toma como base para desarrollar el tópico en 1° de secundaria (**KMLS**-Secuenciación de temas anteriores y posteriores).

La secuencia didáctica que Laura propone está centrada en la agrupación de los cuadriláteros (**KMT**-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Así, va construyendo con sus estudiantes (**KFLM**-Formas de interacción con un contenido matemático), una clasificación tradicional en la que incluye: cuadriláteros: simples, complejos, convexos y no convexos o cóncavos. Sobre estos cuadriláteros, propone un análisis de las propiedades para establecer relaciones jerárquicas entre ellos y, de esta manera, construir una nueva clasificación que parta del cuadrilátero más general para que, añadiéndole características, se obtenga los demás cuadriláteros (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Esta actividad (**KMT**-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) está mediada por el uso de recursos para enseñanza de los cuadriláteros, tales como tiras móviles de papel (**KMT**-Recursos materiales y virtuales) que permiten visualizar la variación de características. El uso de tiras móviles (para simular los lados de los cuadriláteros) en la construcción de una clasificación inclusiva de cuadriláteros propicia el reparo en las características de una definición matemática (**KPM**-Practicas particulares del quehacer matemático) debido a la estrecha relación entre clasificación y definición (De Villiers et al., 2009). El desarrollo de esta actividad lleva a pensar en las definiciones procesuales que proponen Shir y Zaslavsky (2001).

Dado que Laura va construyendo una clasificación jerárquica a partir de hacer dobleces a las tiras móviles para variar su tamaño o cambiar de tira según el tamaño que necesita (**KMT**-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos), concluimos que no se trata de añadidura de características a un cuadrilátero más general, puesto que no se conservan las características iniciales de este (medida de los lados). Lo que Laura hace es realizar movimientos de construcción, en las diferentes etapas, para modificar la composición de cada cuadrilátero. Bajo este procedimiento, llega a los paralelogramos para determinar el más particular La consideración de esto como una “transformación” que permite el paso de una clase a otra, puede ser consecuencia de su comprensión de las clasificaciones inclusivas y de los procedimientos para clasificar. Esta consideración no solo evidencia el conocimiento de definiciones, propiedades y sus fundamentos (**KoT**) que posee, sino también, la argumentación como práctica matemática, basada en regularidades de un conjunto de casos (**KPM**–Formas de validación y demostración). Observamos pues, que confunde inclusividad de las clases con transformación. En consecuencia, no puede asegurarse que para Laura el trapecio rectángulo representa una subclase del trapecio isósceles o el paralelogramo un tipo de trapecio rectángulo. Esto evidencia ausencia de comprensión de clasificaciones inclusivas (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

El último diálogo evidencia el conocimiento de Laura que va emergiendo mientras desarrolla la sesión de clase (**KoT**-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Reconoce las diferencias respecto de su conocimiento inicial y plantea sus dudas. Así, menciona al trapezoide simétrico y asimétrico como los referentes más generales sin una distinción de la clase de vínculo o jerarquía entre ellos.

EPISODIO 5

Investigador principal (doctorando): Marieli Vanessa Rediske de Almeida

Director/es del trabajo: Dr. Miguel Ribeiro y Dr. Dario Fiorentini

Nivel educativo: Formación de profesores de matemáticas

Contenido matemático: Divisibilidad

Breve contextualización del episodio

El participante cuyos conocimientos comentamos en este episodio, Benny, posee una licenciatura, maestría y doctorado en matemáticas, realiza investigaciones en el área de las matemáticas puras y trabaja en la formación de profesores de matemáticas. La información fue recolectada durante un semestre en una disciplina de Teoría de Números, ofrecida como disciplina común para futuros matemáticos y futuros profesores de matemáticas en una universidad pública brasileña. El tema discutido por el formador en esta clase es la divisibilidad. En particular, se discute el Teorema del Algoritmo de la División Euclidiana (TADE), que garantiza la existencia y unicidad del cociente y el resto en la división Euclidiana. El análisis se centra en los ejemplos y explicaciones del formador al presentar el teorema.

Transcripción del episodio

168 Benny: [...] essa vai ser minha divisão de Euclides. Dados dois números, onde

169 esse é diferente de zero,

170 (Aponta o a no enunciado do teorema.)

171 então eu quero achar q e r tal que se cumpra tudo isso, e

172 com esta condição, está bem? [...] Isso significaria dividir.

173 Então vejam que aqui temos duas coisas, não? Temos existência,

174 existência e o que mais?

175 Est: Únicos.

176 Benny: Isso. Unicidade. Ou seja, temos que provar que existem, e que de fato, são únicos. Está bem?

[...]

178 Benny: Aqui o que está furando?

179 (Aponta para 32+(-1) escrito na lousa.)

180 Por exemplo, aqui, este está bonitinho.

181 (Aponta para 22+1 escrito na lousa.)

182 Um maior ou igual que zero, menor que quanto? Que dois, não é verdade? Aqui está

183 bem, não é? Se cumpre. Aqui que está furando.

184 (Aponta a expressão 32+-1.)

185 Est A divisão não é euclidiana por causa do...

186 Benny Aqui o que está furando, a respeito disso, o que está furando?

187 Est Que o resto é -1.

188 Benny Claro, que o resto é -1.

[...]

191 Benny: Bom, e aqui você pode gerar

192 outro exemplo, não? Se eu quero... tenta outro exemplo aqui, vejam, tenta, imagina

193 qualquer coisa, aqui, o dois está fixo, não? Aqui bota, este q, não falo nada de q.

194 Então, se por exemplo, aqui boto -1 (na posição de q), quanto tenho que botar

195 aqui (na posição de r)? Se aqui boto -1, quanto tenho que botar aqui?

[...]

200 Est: Sete. Sete.

[...]

205 Benny: O que está furando aqui? Que sete não é menor que dois. Entendem?

206 Ou seja, eu posso escrever essa expressão de muitas maneiras seguramente.

207 De muitas maneiras. As que eu quiser. Isso vai ficar evidente na prova. Mas vai ser

208 única, se eu coloco essa expressão, entende?

209 (Aponta para $0 \leq r < a$.)

210 Essa é a ideia do teorema.

[...]

219 Benny: O teorema diz que existem, não é? O teorema é (sobre) existência e unicidade.

220 Mas o objetivo é achar eles, não? Qual é o q e qual é o r. Eu já sei que existem,

221 não é? E o teorema diz mais: vão ser únicos.

[...]

224 Benny: *Então, por exemplo, dados estes números*

225 *(Escreve b=153 e a=12 na lousa.) [...]*

227 *Quanto seria o q e quanto seria r? Como eu faço?*

228 Est: *q é 12.*

229 Benny: *12, multiplicado por a, que seria... 12 neste caso, igual, mais quanto? r, que seria quanto? 9, não?*

[...]

Benny representa o algoritmo da divisão euclidiana geometricamente, tomando 153 em uma reta numérica, considerando 12 saltos de mesmo tamanho e destacando o resto 9.

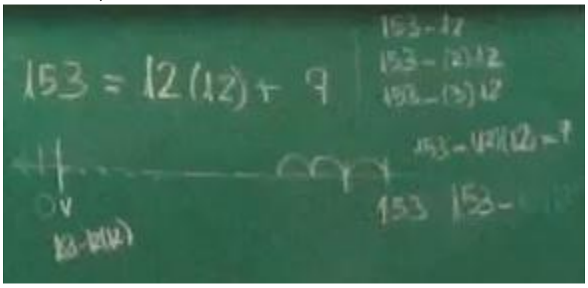


Figura 1 – Decomposição de 153, considerando 12 como divisor, escrita na lousa

244 Benny: *Agora seria bom dar uma ilustração da forma ou do método da prova.*

245 *Aqui, por exemplo*

246 *(Desenha uma reta.)*

247 *Aqui está meu zero.*

248 *(Marca o zero na reta.)*

249 *O que está dizendo isso daqui?*

250 *(Aponta para 153=1212+9 escrito na lousa.)*

251 *Eu tenho o 153 por aqui.*

252 *(Marca 153 na reta.)*

253 Benny: *O que estou dizendo é que você tem que fazer 153-12. Seria uma*

254 *primeira operação, não é? Depois, 153-2(12), está bem? Aqui seria 1, aqui seria 2.*

255 *Então tiro, digamos assim, um pedacinho, do ponto de vista geométrico. 153, vou para*

256 *cá, não é? Um*

257 *(Mostra um salto na reta.)*

258 *não é verdade? Este cont... a pergunta vai ser, continua positivo ou não? Sim. Já*

259 *sabemos que é positivo, não? [...] 153 menos este número, vejam, 12 multiplicado por*

260 *12. Quanto me dá isso?*

261 Est: *9.*

262 Benny: Ou seja, quer dizer que... uma, duas vezes, três vezes... até por aqui, não é? Aqui seria

263 153-12(12), entendem? Sim? Que vai me dar 9. E o seguinte, o que acontece com o

264 seguinte? O que acontece com 153-13(12)?

265 Ele... ele cruza o zero, não? Esse é o momento em que paro, não?

266 E esse é o r que escolho, entendem? Este é o r.

Análisis del conocimiento especializado

Benny enuncia o TADE, pontuando que o divisor precisa ser diferente de zero e que existem q e r, tal que $b=qa+r$, com $0 \leq r<a$ [168-172]. A seguir, evidencia saber que a demonstração do teorema deve ser feita em duas partes, existência e unicidade [173-176] (**KPM** – conhecer como demonstrar teoremas de existência e unicidade, separando a demonstração em duas partes).

Benny então retoma o exemplo 5÷2 (apresentado anteriormente), assinalando que na primeira decomposição apresentada (5=22+1) o quociente e o resto cumprem as condições do teorema, enquanto na segunda decomposição (5=32+-1) isso não acontece. Dessa forma, Benny está chamando a atenção dos estudantes para a existência de diversas possibilidades de decomposição para um mesmo número, sem que essas decomposições atendam a condição $0 \leq r<a$, por meio de um exemplo [178-188] (**KMT** – conhecer exemplos de decomposição que não cumprem a condição $0 \leq r<a$ do TADE).

Aqui, o formador pode estar retomando o exemplo e frisando a necessidade de que o quociente e o resto precisam estar nas condições do teorema, por saber que isso nem sempre é evidente para os estudantes (**KFLM** – conhecer a dificuldade comum dos estudantes em perceber que a decomposição nas condições do TADE é única). Benny estimula os estudantes a pensarem em outras decomposições possíveis [191-193], escolhendo um novo valor para o quociente na decomposição de cinco, considerando dois como divisor [194-195], e novamente ressalta que tal decomposição não está de acordo com as condições do TADE [205-210].

A seguir Benny afirma que o TADE não apenas garante a existência e a unicidade do quociente e do resto, mas também indica uma forma de encontrá-los [219-221] (**KPM** - conhecer que a demonstração do TADE permite exibir o quociente e o resto).

Benny então fornece um novo exemplo de divisão, evidenciando o quociente e o resto [224-229]. Ele faz os cálculos com os estudantes e busca ilustrar a decomposição de 153 geometricamente.

Benny busca representar o algoritmo da divisão geometricamente (Figura 1), mostrando conhecer diferentes representações para o algoritmo [244-252] (**KoT**– conhecer uma forma de representar a decomposição do TADE geometricamente, marcando o dividendo 153 na reta numérica, considerando 12 saltos (quociente) de tamanho 12 (divisor) e obtendo resto 9).

Ao representar geometricamente, além de estabelecer conexão entre a divisão e a subtração [253-255] (**KoT** – conhecer uma conexão intraconceitual entre divisão e subtração, resolvendo a divisão por meio de um processo de subtrações sucessivas), Benny também está trabalhando com o sentido de medida na divisão [255-266] (**KoT** – conhecer que a divisão pode ser entendida como medida e que isso se encontra associado a ver quantas vezes necessito considerar a minha unidade, ou partes dela, para efetuar a medição), considerando quantas vezes 12 cabe em 153 e destacando o significado geométrico do resto.

Ao ilustrar o algoritmo geometricamente, Benny evidencia conhecer o aspecto exaustivo da decomposição do TADE, no sentido de que o processo de ir medindo 12 dentro de 153, em algum momento, termina [253-266] (**KoT** – conhecer como decompor o dividendo encarando a divisão como medida), obtendo uma expressão cujos quociente e resto se encaixam nas condições do teorema. Isso pode ser ainda entendido como uma espécie de tentativa e erro, até obter a decomposição desejada de 153.

O exemplo utilizado por Benny permite aos estudantes visualizarem o processo de divisão como medida, evidenciando a tentativa de promover esse conhecimento nos futuros professores (*Knowledge of the features of the professional development of mathematics teachers* - Conhecer o foco da divisão como medida, que pode ser mais apropriado para a construção do conhecimento dos futuros professores, ao abordar o TADE).

EPISODIO 6

Investigador principal (doctorando): María del Carmen Regolini.

Director/es del trabajo: Dra. Nuria Climent Rodríguez.

Nivel educativo: Universitario.

Contenido matemático: Sistemas de ecuaciones lineales.

Breve contextualización del episodio

La profesora, de seudónimo Josefina (J), dicta clases de resolución de ejercicios de Álgebra Lineal para estudiantes de segundo año, en una Facultad de Ciencias Económicas en Argentina.

En el episodio que se transcribe a continuación, Josefina enseña cómo se obtiene la solución única de un sistema de ecuaciones lineales mediante la regla de Cramer. Con anterioridad, la profesora ha expresado, simbólicamente el sistema de ecuaciones lineales por resolver como una ecuación matricial de la forma $A_{3x3} \cdot X_{3x1} = B_{3x1}$, y ha analizado si se verifican las condiciones que establece esta regla para aplicarla, es decir, ha comprobado que el sistema de ecuaciones lineales es cuadrado y el determinante de su matriz de coeficientes es distinto de cero.

Transcripción del episodio

J: *Para resolverlo, cada incógnita va a quedar planteada como el cociente de dos determinantes. El determinante del denominador* [es el] *de la matriz A. ¿Qué pasaba con el determinante del numerador? Vamos a plantearlo para este caso*

$$\boxed{x = \frac{|C_1|}{|A|} \qquad y = \frac{|C_2|}{|A|} \qquad z = \frac{|C_3|}{|A|}}$$

¿Cómo se construye cada una de estas matrices C? […] Como voy a trabajar con los coeficientes que acompañan a "x". Voy a tomar todos los coeficientes que acompañan a "x" y los voy a reemplazar por la matriz de términos independientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Así tengo planteada la matriz C_1

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

¿Qué cambia de la matriz A? La primer[a] *columna, que eran los coeficientes que acompañan a "x" ¿Qué valores uso ahora? Los de la matriz de términos independientes. [...] Construimos* C_2 *La primer*[a] *columna va a quedar tal cual y la segunda es la que va a cambiar*

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

[...] ¿Qué nos faltaría?

A: *Calcular* C_3

J: *Bien, calcular* C_3 [se refiere a construir la matriz]

$$C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Entonces ¿"x" a qué es igual? Va a ser igual a menos treinta sobre cinco. Y esto es igual a menos seis.

$$x = \frac{|C_1|}{|A|} = \frac{-30}{5} = -6$$

Así logro hallar el valor de "x", como el cociente de dos determinantes. [...] ¿Qué voy a hacer para poder resolver "y" y "z"?

$$y = \frac{|C_2|}{|A|} = \frac{15}{5} = 3 \qquad z = \frac{|C_3|}{|A|} = \frac{10}{5} = 2$$

Entonces, ¿a qué llegamos? A que "x" es igual a menos seis, "y" es igual a tres, y "z" es igual a dos. Entonces hemos resuelto el sistema de ecuaciones lineales llegando a la solución de cada variable aplicando la regla de Cramer.

<u>Análisis del conocimiento especializado</u>

Josefina evidencia su conocimiento de que en la regla de Cramer, el valor de cada incógnita surge del cociente entre dos determinantes. Donde en el denominador siempre figura el determinante de la matriz de coeficientes (A), pero cada numerador corresponde al determinante de una matriz que se debe construir, tomando en cuenta la matriz de los términos independientes (B) (**KoT**–*Procedimientos ¿Cómo se hace?*), y para distinguirlas deberá denotarlas con una letra

diferente a las utilizadas en la ecuación matricial y con un subíndice. En este caso, las expresa como C_j, donde *j* está relacionado con la incógnita cuyo valor se pretende obtener, utiliza $j=1$, $j=2$ o $j=3$ cuando pretende calcular el valor de las variables, respectivas, x, y o z. (**KoT**–*Registros de representación*).
El uso de las matrices C_j con $1 \leq j \leq 3$ revela el **KMT** de Josefina, referido a la categoría *Estrategias, Técnicas, Tareas y Ejemplos*, al tomar en cuenta que las utiliza para mostrar, a sus estudiantes, todas las posibilidades que tiene la matriz de términos independientes B, de ir ocupando el lugar de las diferentes columnas de A, al ejecutar el reemplazo. Para cada matriz, la profesora lo hace visible en el pizarrón cuando emplea óvalos verticales para destacar los elementos que corresponden a la columna de los términos independientes.
Sobre la solución obtenida, la profesora evidencia saber que con esta regla se indica el valor que asume cada una de las incógnitas (**KoT**–*Procedimientos: Característica del resultado*).

Tras el análisis efectuado se ha logrado apreciar parte del conocimiento que sustenta la práctica de esta profesora universitaria, dejando traslucir una integración entre el conocimiento de los temas **KoT** y de la enseñanza de las matemáticas (**KMT**).

EPISODIO 7

Investigador principal (doctorando): María Isabel Pascual Martín.

Director/es del trabajo: Dr. Miguel Montes Navarro y Dr. Luis Carlos Contreras González.

Nivel educativo: Universitario.

Contenido matemático: Clasificación de triánguos.

Breve contextualización del episodio

El objetivo de esta sesión es discutir diseños de enseñanza para el contenido *clasificación de triángulos*. Situaremos el foco en el conocimiento especializado, en términos del modelo MTSK, que se pone en juego durante la sesión. El análisis y la clasificación de los triángulos es un contenido recurrente en distintos cursos de Educación Primaria lo que justifica la necesidad de fundamentar el conocimiento matemático de los estudiantes para maestro (EPM) al respecto y, a su vez, añadir consideraciones sobre el conocimiento didáctico de este contenido.

La propia actividad encomendada a los EPM (Cuadro 1. Actividad sobre clasificación de triángulos en formación inicial) puede ser analizada desde el modelo MTSK en tanto que incluye la reflexión sobre distintos elementos de conocimiento especializado.

Actividad 2. Analizar propiedades y características (Clasificar II)

a) (Antes de la clase) Diseña una sesión para trabajar en 4º de primaria la clasificación de triángulos. Utiliza algún recurso (geoplanos, tramas de puntos, geotiras, …) para ello.
b) (En clase) Discute con tus compañeros los puntos fuertes y débiles de las diferentes propuestas planteadas.
c) Obtén de la plataforma una trama de puntos y dibuja (en clase) tantos triángulos diferentes como seas capaz.
d) Discute por qué cada uno es diferente de los anteriores.
e) ¿Puedes trazar sobre la trama un triángulo equilátero? Razona tu respuesta.

Cuadro 1. Actividad sobre clasificación de triángulos en formación inicial

Transcripción y análisis del episodio

Tras la introducción a la sesión y la presentación de la tarea, tiene lugar la exposición de un diseño de enseñanza de la mano de una EPM, que comienza a dibujar en la pizarra los triángulos que tiene en su diseño:

Lucas: Y, ¿cuáles son los tipos?, ¿puedes ponerlos en la pizarra para que veamos tu idea inicial? Tu objetivo sería que los alumnos sepan que los triángulos se pueden clasificar en [espera los dibujos. Marta empieza a dibujar un triángulo en posición prototípica y lo borra] Cuesta, ¿eh? Es que tenemos dependencia y eso tenemos que ir rompiéndolo, tendemos a pintarlos estereotipados, si es que los estereotipos son muy potentes. Son años de estereotipos, libros, pizarra, años. [Marta dibuja en la pizarra:

]

Extracto 2. Puesta en común del diseño de una EPM – uso de ejemplos (líneas 64-70)

Mientras Marta, la EPM, dibuja en la pizarra los ejemplos de triángulo que quiere mostrar, rectifica en sus posiciones, mostrando así cómo va asimilando las limitaciones que tiene el uso de imágenes prototípicas en la construcción de la imagen mental de triángulo, reforzando la evidencia encontrada del trabajo sobre **KMT** y **KFLM** en el aula de formación inicial. Tras la presentación de los ejemplos, el formador interrumpe para hacer hincapié en el uso de los ejemplos para construir una clasificación de forma inductiva, es decir, a partir del análisis de las características y la posterior definición de un criterio:

Lucas: ¿Qué es lo que está haciendo Marta exactamente? No nos digas qué es lo que estás haciendo, ¿qué está haciendo Marta? [Silencio] Fijémonos en qué le hemos pedido, y sobre todo mi pregunta ¿qué objetivos tiene para clasificar triángulos? Que los clasifique según… Yo se lo he preguntado y ella de momento lo que me hace para responderme a esa pregunta es… ¿qué hace?
Alumno: Dibujar triángulos
Lucas: Dibujar ejemplos de triángulos, ella intenta transmitirnos lo que nos quiere decir a través del uso de ejemplos. Está ejemplificando unos triángulos que para ella son diferentes, creo, ¿no? ¿Qué es lo que has intentado transmitirnos con esos tres triángulos?
Marta: Pues los tres tipos de triángulo que existen según los ángulos que tengan.
Lucas: Según los ángulos.

Extracto 3. Puesta en común del diseño de una EPM – construcción de la clasificación (líneas 71-82)

Durante la explicación de Marta, el formador identifica posibles debilidades de su diseño relacionadas con la transparencia en las representaciones que usa lo que inicia una discusión en gran grupo en la que se relacionan las características lados y ángulos de los triángulos. Como ya indica la literatura de investigación, en ocasiones, el conocimiento matemático de los EPM se revela poco fundamentado. El formador aprovecha esta oportunidad para profundizar en las relaciones que se establecen entre las características de los lados y los ángulos en el triángulo. Tradicionalmente, el análisis y la clasificación de triángulos según sus lados y ángulos se desarrolla de forma paralela en la etapa de Educación Primaria y los EPM muestran dificultades a la hora de establecer dichas relaciones. La discusión se enfoca en argumentar la imposibilidad de que un triángulo equilátero sea rectángulo, en un proceso que permite a los EPM reconstruir su conocimiento matemático y fortalecerlo:

Lucas: […] Esto es una pregunta que nosotros hemos puesto alguna vez en algún examen ¿puede un triángulo rectángulo ser equilátero? ¿Un triángulo rectángulo puede ser equilátero?
General: No
Lucas: ¿Por qué?
Marta: Porque ya no tendría los tres lados iguales
Lucas: ¿Por qué? Eso es lo mismo que decir que no, pero, ¿por qué no? ¿Por qué un triángulo equilátero no puede ser rectángulo o por qué un triángulo rectángulo no puede ser equilátero?
Cinta: Porque si lo haces rectángulo, no tiene sus tres lados iguales.
Lucas: Y, ¿por qué un triángulo rectángulo no tiene sus tres lados iguales?
[Inaudible]
Rocío: Porque si intentamos que todos los ángulos sean de 90 grados, nos daría un cuadrado, no un triángulo.
Lucas: Claro, vale, pero ya vamos por el argumento de los ángulos, pero no hemos continuado con el argumento de los lados. Porque si el triángulo es rectángulo, al ser isósceles, perdón, al ser equilátero, debería tener sus tres ángulos iguales. Como uno es de 90, los tres son de 90, y un triángulo no puede tener tres ángulos de 90 grados. Argumento impecable. Vamos a hacer el argumento de los lados, ¿por qué no puede tener un triángulo rectángulo los tres lados iguales?
Carmen: Porque en un triángulo rectángulo los tres lados no pueden medir igual
Lucas: ¿Y por qué?
[…]
Cinta: Se llama hipotenusa
Lucas: Claro, el tercer lado, al ser rectángulo, hay un lado que es la diagonal de un cuadrado. Al ser equilátero tendría dos lados iguales, el tercer lado sería la diagonal del cuadrado que formarían los otros dos lados y la diagonal de un cuadrado y su lado no miden igual, ¿vale? Es imposible que un triángulo rectángulo sea equilátero.

Extracto 4. Puesta en común del diseño de una EPM – argumentación (líneas 96-128)

El conocimiento matemático del tema (**KoT**) que se evidencia, hace referencia al indicador *definiciones, propiedades y sus fundamentos,* a la vez que esas propiedades y fundamentos son usadas para construir argumentos matemáticos válidos, como ejemplos de *conocimiento de la práctica matemática* (**KPM**), en el sentido de cómo se construye y consolida el conocimiento matemático. Esta misma estrategia de argumentación, se fortalece cuando se discute la no existencia de triángulos cóncavos y la no existencia de diagonales en los triángulos. Ambos momentos, además, sirven para profundizar en el significado de cada uno de estos conceptos. Tras este paréntesis, Marta continúa exponiendo su diseño:

Marta: Pues yo verdaderamente quiero conseguir que los alumnos sepan los diferentes tipos de triángulos que existen y que comprueben mediante ellos mismos las diferencias que pueden tener entre unos y otros.

Lucas: Y, ¿qué vas a hacer? ¿Vas a definir y luego vas a poner ejemplos o vas a poner ejemplos y vas a obtener de ellos la definición de cada uno de los tipos?
Marta: Pues no, porque yo verdaderamente lo que había puesto es que ellos primeramente se pusieran en práctica mediante un supuesto juego y luego…
Lucas: Con tramas o con geoplanos, ¿no?
Marta: Bueno lo que haría era que dibujaría… pondría en el suelo puntos reflejando una trama y ahora a los alumnos los ataría a todos mediante una cuerda. Todos los alumnos estarían en la cuerda y yo pues marcaría, por ejemplo, les pondría puntos rojos y tendrían que marcar los tres puntos. Diría: "Pepe en el punto rojo", o les diría: "Vamos a hacer una cosa, tenemos que ir a la casilla 3,2…

Extracto 5. Puesta en común del diseño de una EPM – uso de recursos (líneas 135-147)

En este extracto, podemos observar el conocimiento movilizado sobre el uso de recursos, en este caso una adaptación de la trama cuadrangular utilizando el enlosado de un aula hipotética. Al ser preguntada por los objetivos de su tarea, la EPM diferencia entre que los alumnos sepan clasificar triángulos según sus lados y según sus ángulos:

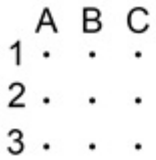
Lucas: Así que ese es tu objetivo, Marta, que es lo que tú aprendiste y lo que encontramos en los libros de texto, ¿tú has mirado algún libro para diseñar esto?
Marta: No
Lucas: Pues es usual… el primer instrumento, no el mejor, pero el primer instrumento que un maestro tiene para diseñar una sesión… ¿os acordáis en primero cuando diseñasteis una sesión de iniciación a la división en tercero de primaria?, estabais desamparados, es más, os lo puse como una metáfora, ¿no? ¿Qué haces? ¿Cuál es el libro de texto que se está usando? Y nos vamos al libro de texto, que es lo que solemos hacer, porque nuestro conocimiento sobre la matemática no es tan potente, debería serlo, pero no lo es, para que nosotros directamente discutamos qué es lo que tenemos que dar. Así que tú, siguiendo ese libro de texto muy discutible, dices: "Según sus lados y según sus ángulos" que son los elementos básicos.

Extracto 6. Puesta en común del diseño de una EPM – libro de texto (líneas 169-187)

Esta última reflexión sobre el libro de texto que plantea el formador, es recurrente en las sesiones analizadas y se entiende en el contexto de la investigación como una llamada a la crítica sobre materiales de enseñanza y sobre la diversificación entre instrumentos. Unida a las constantes llamadas al uso de recursos como geoplano, geotiras o GeoGebra, nos informa de la presencia sobre conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (**KMT**) en lo referido a recursos materiales y virtuales, presente en el aula de formación inicial, pero también propicia la reflexión y valoración individual en lo que puede interpretarse como trabajo sobre las concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El modelo MTSK tiene en consideración las concepciones del profesor en tanto que permean, potenciando o limitando, los distintos subdominios de conocimiento y constituyen una forma personal de conocer que ayuda a interpretar el conocimiento especializado en su totalidad. La validación de la construcción inductiva de conocimiento y del uso crítico de materiales como prácticas profesionales beneficiosas para la enseñanza, puede interferir, mediante la discusión y confrontación, en la formación de las concepciones de los EPM sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje respectivamente.

Una vez que termina esta reflexión, la EPM sigue explicando su diseño en el que utiliza esa versión de geoplano en el enlosado:

Marta: Vale, y yo pondría puntos blancos en el suelo, conservando la distancia y todo para que sea como la trama y le daría a los niños o bien que cada círculo estuviera determinado por un número, o también podría ser, para que practicaran otras cosas, ponerle por ejemplo que fuera… A, B, C, … como el juego del barquito, y 1, 2, 3,… para que los niños así también fueran practicando otras cosas y no tan solo "Ve al punto 17". [Señala el dibujo de la trama, a continuación]



Y también había pensado que si, en el caso de que les costara mucho pues coger yo uno…
Lucas: Un segundito, ¿qué estaríamos trabajando con lo que acabamos de hacer? ¿Qué concepto estamos añadiendo cuando ponemos letras y números en la vertical y en la horizontal? Coordenadas, ¿vale? Sistema de coordenadas no convencional, pero un sistema de coordenadas muy familiar para el niño, que luego nos puede permitir trabajar vectores. Cuando trabajemos sistemas de coordenadas en el plano, las coordenadas ya van a ser puramente numéricas, pero es un buen comienzo, partir de… para sistemas de coordenadas y orientación en el plano, partir de un sistema de coordenadas de un juego que ellos manejan.

Extracto 7. Puesta en común del diseño de una EPM – sistema de coordenadas (líneas 250-264)

En el extracto anterior podemos observar cómo la EPM explicita una conexión entre contenidos que, posteriormente, el formador refuerza. Esta conexión, puede identificarse como parte del conocimiento de la estructura matemática (**KSM**), en el indicador conexiones de complejización. La EPM es consciente de que la trama de puntos del enlosado supone una simplificación de los ejes coordenados, mostrando conocimiento de la matemática como una red articulada de conocimiento.

El diseño de la tarea se sigue discutiendo en el aula. Las aportaciones que tanto el formador como los compañeros hacen sobre el diseño de Marta, permiten discutir elementos de conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (**KFLM**) como la percepción de las características de los triángulos en la actividad, tales como la longitud de los lados o la amplitud de los ángulos representados; así como actividades complementarias, como registro de los triángulos o uso de tramas en papel para facilitar la comparación, mostrándose conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (**KMT**). El cierre de la discusión, termina con las aportaciones de Lucas, que ha ido validando las aportaciones de los EPM en el diseño y que hace hincapié en aquello que es percibido por los alumnos de Educación Primaria en actividades de clasificación, volviendo a relacionar distintos elementos de conocimiento especializado del contenido:

Lucas: Todo esto se pude ir cambiando, versionando, para la consecución de nuestros objetivos, no olvidemos: que tengan muchos triángulos vivenciados para comparar, que tengan propiedades diferentes entre sí, esa es la idea. No se puede clasificar aquello que es igual.

Extracto 8. Puesta en común del diseño de una EPM – cierre actividad (líneas 433-436)

Para terminar el análisis de este episodio de clase, se presenta la síntesis del conocimiento especializado movilizado en el aula durante la gestión de la puesta en común del diseño de la EPM:

Conocimiento movilizado	Indicador	Subdominio MTSK
Análisis conjunto de las caracterizaciones de lados y ángulos en triángulos	Definiciones, propiedades y sus fundamentos	Conocimiento de los temas (KoT)
Concavidad y convexidad de figuras planas: el caso del triángulo		
Argumentación y validación de conocimiento matemático en el aula	Formas de validación y	Conocimiento de la práctica

<table>
<tr><td></td><td>demostración</td><td>matemática</td></tr>
<tr><td>Relaciones entre distintas representaciones, formales e informales, de los ejes cartesianos</td><td>Conexiones de complejización</td><td>Conocimiento de la estructura de la matemática (KSM)</td></tr>
<tr><td>Potencialidades del uso de ejemplos para la enseñanza</td><td rowspan="3">Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos</td><td rowspan="5">Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)</td></tr>
<tr><td>Criterios de diseño de actividades para la construcción inductiva de clasificaciones</td></tr>
<tr><td>Limitaciones en los diseños de enseñanza y opciones de complementariedad</td></tr>
<tr><td>Características de los recursos Geogebra, geotiras y geoplanos y su uso para la enseñanza</td><td rowspan="2">Recursos materiales y virtuales</td></tr>
<tr><td>El uso de trama de puntos y sus distintos registros</td></tr>
<tr><td>Habilidades de los estudiantes de primaria en la percepción de las magnitudes longitud y amplitud angular</td><td>Formas de interacción con el contenido matemático</td><td>Características de aprendizaje de la matemática (KFLM)</td></tr>
<tr><td>Visión constructiva del conocimiento matemático</td><td colspan="2">Concepciones sobre la matemática</td></tr>
<tr><td>Valoración y actitud crítica en la selección y el uso de recursos</td><td colspan="2">Concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática</td></tr>
</table>

Tabla 2. Conocimiento movilizado en la gestión de una actividad en formación inicial